Trzy kierunki prowadzenia badań w Laboratorium Badań Metafizycznych

Edward N. Zalta
CSLI
Uniwersytet Stanforda
zalta@stanford.edu
http://mally.stanford.edu/zalta.html

Plan wykładu

- Przegląd aksjomatycznej teorii przedmiotów (obiektów) abstrakcyjnych
- Filozofia matematyki, neologicyzm i logicyzm
- Epistemologia przedmiotów abstrakcyjnych
- Metafizyka obliczeniowa

Przegląd aksjomatycznej teorii przedmiotów (obiektów) abstrakcyjnych

Teoria przedmiotów abstrakcyjnych I: Język

- zmienne przebiegające przedmioty oraz stałe: $x, y, z, \ldots ; a, b, c, \ldots$
- zmienne i stałe relacyjne: $F^n, G^n, H^n, \ldots ;$
  $P^n, Q^n, R^n, \ldots$ (gdy $n \geq 0$); $p, q, r, \ldots$ (gdy $n = 0$)
- wyróżniona unarna relacja: $E!$ (czytaj: *konkretne*)
- formuły atomowe:
  $F^n x_1 \ldots x_n$ (‘$x_1, \ldots, x_n$ egzemplifikują F^n’)
  xF^1 (‘x koduje F^1’)
- formuły złożone: $\neg\phi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\forall\alpha\phi$ (α dowolna zmienna), $\Box\phi$
- termy złożone:
  deskrypcje: $\iota x\phi$
  λ-predykaty: $[\lambda x_1 \ldots x_n\ \phi]$ (ϕ bez podformuł kodowania)

Teoria przedmiotów abstrakcyjnych: Definicje I

- $\&$, $\vee$, $\equiv$, $\exists$, oraz $\Diamond$ są wszystkie zdefiniowane w zwykły sposób
- przedmioty *zwyczajne* są prawdopodobnie konkretne
  $O! =_{df} [\lambda x \, \Diamond E!x]$
- przedmioty *abstrakcyjne* nie mogłyby być konkretnymi
  $A! =_{df} [\lambda x \, \neg\Diamond E!x]$
- x oraz y są E-identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy x i y oba są przedmiotami zwyczajnymi i w sposób konieczny egzemplifikują te same własności
  $x =_E y =_{df} O!x \,\&\, O!y \,\&\, \Box\forall F(Fx \equiv Fy)$
- x oraz y są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy bądź x i y są E-identyczne, bądź x i y są oba abstrakcyjne i w sposób konieczny kodują te same własności
  $x = y =_{df} x =_E y \vee (A!x \,\&\, A!y \,\&\, \Box\forall F(xF \equiv yF))$

Teoria przedmiotów abstrakcyjnych: Definicje II

- F i G są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy F i G są w sposób konieczny kodowane przez te same przedmioty
  $F^1 = G^1 \ =_{df} \ \Box\forall x(xF^1 \equiv xG^1)$
- p i q są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy własność *bycia takim, że p* jest identyczna z własnością *bycia takim, że q*
  $p = q \ =_{df} \ [\lambda y\ p] = [\lambda y\ q]$

Teoria przedmiotów abstrakcyjnych: Logika

- najprostsza kwantyfikatorowa logika modalna S5 drugiego rzędu:
  Wzory Barcan pierwszego i drugiego rzędu (tj. ustalone dziedziny)
  (za Linsky & Zalta 1994, Williamson 1998)
- logika kodowania: $\Diamond xF \rightarrow \Box xF$
- logika identyczności: $\alpha = \beta \rightarrow [\phi(\alpha, \alpha) \equiv \phi(\alpha, \beta)]$
  (β podstawialna za α)
- logika klasyczna λ-predykatów:
  $[\lambda x_1 \ldots x_n\, \phi]y_1 \ldots y_n \equiv \phi^{y_1,\ldots,y_n}_{x_1,\ldots,x_n}$ (w ϕ nie występują żadne deskrypcje)
  np., $[\lambda x\, \neg Rx]y \equiv \neg Ry$
- logika klasyczna (sztywnych) deskrypcji

Teoria właściwa

A. Właściwe aksjomaty

- $O!x \rightarrow \Box\neg\exists F\, xF$
- $\exists x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \phi))$, gdzie ϕ nie ma (żadnego) wolnego wystąpienia zmiennej x

B. Deskrypcje dobrze zdefiniowane

- $\iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \phi))$

C. Schemat twierdzeń właściwych

- $\iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \phi))G \;\equiv\; \phi^{G}_{F}$

Kilka przykładów przedmiotów abstrakcyjnych: I

- *Pojęcie zupełne* y = przedmiot abstrakcyjny kodujący dokładnie te własności, które y egzemplifikuje
  $\iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv Fy))$
- *Świat możliwy*(x) $=_{df}$ x może być takie, że koduje ono wszystkie i tylko prawdziwe zdania
  $\Diamond\forall p(x[\lambda y\, p] \equiv p)$

  p jest prawdziwe przy w (‘$w \models p$’) $=_{df}$ $w[\lambda y\, p]$
- *Świat rzeczywisty* = przedmiot, który koduje wszystkie i tylko prawdziwe zdania
  $\iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \exists p(p \;\&\; F = [\lambda y\, p])))$

Kilka przykładów przedmiotów abstrakcyjnych: II

- *wartość prawdy p* = przedmiot abstrakcyjny, który koduje wszystkie i tylko te zdania q, które są materialnie równoważne p
  $\imath x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \exists q(q \equiv p \;\&\; F = [\lambda y\; q])))$

- *Ekstensja pojęcia G* = przedmiot abstrakcyjny, który koduje wszystkie i tylko te własności F, które są materialnie równoważne G
  $\imath x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \forall y(Fy \equiv Gy)))$

- *Forma G* = przedmiot abstrakcyjny, który koduje wszystkie i tylko te własności F, które są w sposób konieczny implikowane przez G
  $\imath x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \Box\forall y(Gy \rightarrow Fy)))$

Filozofia matematyki, neologicyzm i logicyzm

Neologicyzm: I

- Logicyzm: Matematyka jest redukowalna do logiki.
- Obecnie nie ma już prawie żadnego obrońcy logicyzmu.
- Są trzy sposoby osłabiania logicyzmu w usiłowaniach znalezienia prawdziwej tezy (utrzymujące przy tym matematykę jako ustaloną dziedzinę):
  1. rozszerzyć pojęcia logiki w sposób minimalny
  2. dopuścić ograniczone zasoby pozalogiczne, np. prawdy analityczne
  3. zrewidować pojęcia redukowalności
- Podział przyjętych stanowisk:
  1. Hodes (1984, 1991), Tenant (2004) postępują ścieżką (1)
  2. Wright (1983), Hale (1987, 2000), Hale & Wright (2001), Boolos (1986), Cook (2003), Fine (2002) idą drogą (2)
  3. Zalta (2000), Linsky & Zalta (1995, 2006) przyjmują opcję (3).

Neologicyzm: II

- Stanowiska (1) i (2) napotykają na trudności:
  - Niektórzy dodają aksjomaty nieskończoności.
  - Niektórzy dodają wyrywkowo dodatkowe zasady logiczne.
  - Niektórzy napotykają problem Juliusza Cezara.
  - Niektórzy muszą stawić czoła zakłopotaniu z uwagi na bogactwo problemu.
  - Prawie wszyscy dodają matematyczne terminy pierwotne.
- Z jednym wyjątkiem (Cook 2003), stanowiska (1) i (2) napotykają ‘granice abstrakcji’.
- Zasady Cook’a są tak mocne, że są raczej matematyczne niż logiczne; Cook dodaje: aksjomat nieskończoności, nowe matematyczne terminy pierwotne (EXT, ORD), zasady, które nawet nie są nawet bliskie analitycznym, nowy rodzaj problemu Juliusza Cezara, itd.

Neologicyzm: III

- Argumentujemy (Linsky & Zalta 2006), że teoria przedmiotów trzeciego rzędu jest (pewną) wersją neologicyzmu: stosuje nowy rodzaj redukcji i nie posiada żadnych ograniczeń tyczących abstrakcji, gdyż dowolne teorie matematyczne można zredukować do logiki trzeciego rzędu i prawd analitycznych.

Przedmioty matematyczne

- *p jest prawdziwe w teorii* T ('$T \models p$') $=_{df}$ $T[\lambda y\, p]$
  tj. teorie matematyczne są traktowane jako przedmioty kodujące zdania
- Dla każdej formuły ϕ, będącej aksjomatem teorii T, dodaje prawdę analityczną:
  $T \models \phi^*$ (z pierwotnymi stałymi κ w ϕ zastąpionymi przez κ_T w ϕ^*)
- Zasada domknięcia: Z $p_1, \ldots, p_n \vdash q$ oraz $T \models p_1, \ldots, T \models p_n$,
  wnioskuj $T \models q$
- Aksjomat Redukcji: teoretycznie identyfikuje przedmiot jednostkowy κ_T jak następuje:

$$\kappa_T = \iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \; T \models F\kappa_T))$$

$$0_{\mathrm{PNT}} = \iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \; \mathrm{PNT} \models F0_{\mathrm{PNT}}))$$

$$\emptyset_{\mathrm{ZF}} = \iota x(A!x \;\&\; \forall F(xF \equiv \; \mathrm{ZF} \models F\emptyset_{\mathrm{ZF}}))$$

Relacje matematyczne

- Język trzeciego rzędu, komprehensja nad abstrakcyjnymi własnościami/relacjami:

$$\Pi_T \;=\; \iota R(\mathbf{A}!R \;\&\; \forall \mathbf{F}(R\mathbf{F} \equiv \text{T} \models \mathbf{F}\Pi_T))$$

- Innymi słowy: własność Π teorii T jest abstrakcyjną relacją R, która koduje wszystkie i tylko takie własności drugiego poziomu **F**, że w teorii T, Π egzemplifikuje **F**.

- To nie *wprowadza* relacji Π, ale raczej jest zasadą , która identyfikuje Π w terminach jej roli w teorii T.

- Przykłady:

$$S_{\text{PNT}} = \iota R(\mathbf{A}!R \;\&\; \forall \mathbf{F}(R\mathbf{F} \equiv \text{PNT} \models \mathbf{F}S_{\text{PNT}}))$$

$$\in_{\text{ZF}} = \iota R(\mathbf{A}!R \;\&\; \forall \mathbf{F}(R\mathbf{F} \equiv \text{ZF} \models \mathbf{F}\in_{\text{ZF}}))$$

Prawda zdań matematycznych

- Prawdziwe są (kodujące) odczyty zwyczajnych stwierdzeń matematycznych (tj. takich bez poprzedzania ich prefiksem ‘operatora teoriowego’).
- Zdanie:

  W teorii liczb rzeczywistych, liczba $\sqrt{2}$ jest algebraiczna

  RNT $\models A\sqrt{2}$ (opuszczając indeksy dolne)

  jest równoważne ‘$\sqrt{2}A$’.
- Zatem zwyczajne zdanie matematyczne:

  liczba $\sqrt{2}$ jest algebraiczna

  jest niejednoznaczne między

  $\sqrt{2}\,A$ (prawdziwe)

  $A\sqrt{2}$ (fałszywe)

Logicyzm

- Poniższe staje się logicyzmem z chwilą, gdy zastąpimy komprehensję:

  $$\exists x(A!x \,\&\, \forall F(xF \equiv \phi))$$
  $$\exists R(\mathbf{A}!R \,\&\, \forall \mathbf{F}(R\mathbf{F} \equiv \phi))$$

  abstrakcją

  $$\iota x(A!x \,\&\, \forall F(xF \equiv \phi))G \equiv \phi^{G}_{F}$$
  $$\iota R(\mathbf{A}!R \,\&\, \forall \mathbf{F}(R\mathbf{F} \equiv \phi))\mathbf{G} \equiv \phi^{\mathbf{G}}_{\mathbf{F}}$$

Logicyzm

- Teoria przedmiotów wykorzystuje: logikę trzeciego rzędu (pod modelami ogólnymi!), powyższe prawdy analityczne (które mogą być prawdziwe w bardzo małych modelach), i analityczne prawdy matematyki (poprzedzone operatorem 'w teorii'). Daje to nową postać redukcji matematycznej:
  - Denotację dla każdego poprawnie zdefiniowanego terminu dowolnej teorii T.
  - Prawdziwego (kodującego) odczytu dla każdego twierdzenia T

Epistemologia przedmiotów abstrakcyjnych

Epistemologia: I

- Motywująca siła, która stoi za logicyzmem Fregego: jak pojmujemy liczby?
- Linsky & Zalta 1995: aby pogodzić platonizm i naturalizm, należy stworzyć właściwą koncepcję niezależności umysłu oraz obiektywizmu przedmiotów abstrakcyjnych.
- Nie używać modelu epistemologicznego przedmiotów fizykalnych (ciał fizycznych):
  - Ciała fizyczne są skąpo rozsiane w swojej dziedzinie. Trzeba wykonać sporo pracy, by je odkryć.
  - Ciała fizyczne podlegają rozróżnieniu: pozór/rzeczywistość. Mają tyły!
  - Są kompletne i determinowane, z kilkoma wyjątkami.

Epistemologia: II

- Przedmioty abstrakcyjne nie są takie, jak przedstawiono poniżej:
  - Rządzą się one zasadą komprehensji, rodzą obfitą, a nie rzadką dziedzinę. Jest ich tak wiele, jak tylko to możliwe.
  - Nie ma rozróżnienia na pozór/rzeczywistość. Są one po prostu sposobem, w jaki je przyjmujemy w ich opisie.
  - Jest pewien wymiar, w którym są one niekompletne.
- Przyjmując powyższy model, wykazujemy, że:
  - Wiedza o przedmiotach matematycznych (oraz, ogólniej, o przedmiotach abstrakcyjnych) dokonuje się poprzez deskrypcję: $\iota x(A!x \ \& \ \forall F(xF \equiv \phi))$
  - Wszystko, co musimy uczynić, aby posiąść wiedzę o przedmiocie abstrakcyjnym to rozumieć jego opis: wiedza przez zapoznanie oraz wiedza przez opis zawodzą.

Epistemologia: III

- Jest to zgodne z zasadą naturalizmu:
  - Komprehensja jest nieskrępowana; przedmioty abstrakcyjne są postulowane w nie-wyrywkowy i nie-arbitralny sposób.
  - Jest oszczędne: powinniśmy przyjąć jak najmniej przedmiotów abstrakcyjnych w sposób nie-arbitralny, lecz z przedmiotami abstrakcyjnymi rządzonymi przez zasadę komprehensji; jedynym sposobem przyjęcia najmniejszej ich ilości, jak tylko możliwe, jest przyjęcie ich wszystkich.
- Obecnie rozwijać tę epistemologię w dwu nowych kierunkach:
  (1) Odwoływać się do epistemologii logicystycznej, oraz
  (2) Re-konceptualizować formalizm, nie jako rodzaj platonizmu, lecz jako zasadę, która przejmuje Wittgensteinowskie znaczenie jako doktrynę użycia.

Epistemologia logicystyczna

“Lecz w odpowiedzi Kantowi, logicyści twierdzili że te [matematyczne] zdania są a priori ponieważ mają charakter analityczny – ponieważ są prawdziwe (fałszywe) jedynie ‘z racji’ znaczeń tych terminów w których są osadzone. Zatem znać ich znaczenia to znaczy wiedzieć to wszystko, co jest wymagane dla wiedzy o ich prawdziwości. Nie potrzeba żadnych badań empirycznych. Filozoficzny punkt ustalenia poglądu był czysto epistemologiczny: logicyzm, jeśli można by go ustalić, ukazałby, że naszą znajomość matematyki można by wyjaśnić przy pomocy tego, co tłumaczy naszą znajomość języka. A, oczywiście, zakładano, że znajomość *samego* języka można wyjaśnić w sposób spójny z zasadami empirycznymi, że sam język został całkowicie poznany. Tak więc, idąc za Hume’em, całą naszą wiedzę można by ponownie postrzegać jako dotyczącą albo ‘relacji idei’ (analitycznie i a priori) albo (jako) ‘kwestię faktu’.”

(Benacerraf 1981, 42–43)

Re-konceptualizacja przedmiotów abstrakcyjnych

- **Cel**: znalezienie koncepcji przedmiotów abstrakcyjnych jako wielkości, w które wszyscy wierzymy jako naturaliści.
- **Metoda**: użycie interpretacji zasady rozumienia 'do góry nogami'.
- **Interpretacja**: systematyzuje praktykę matematyczną, tj. systematyzuje rozmaitość wielko-formatowych wzorców zachowań (wzorce mowy, użycia języka, itp.), jakie angażują matematycy, kiedy posługują się teorią liczb, algebrą liniową, analizą, itd.

Re-interpretacja: I

- W praktyce matematycznej, matematycy stwierdzają zasady, wprowadzając nowe terminy przy użyciu języka tych zasad, i dowodząc nowych twierdzeń wychodząc z tych zasad. Np., Zermelo ustalając zasady zawierające terminy '$\emptyset$', $\cup$, oraz predykat '$\in$'
- Matematycy używają tych terminów, aby osadzić referencyjne i anaforyczne użycia zaimka 'ono', aby sformułować nowe twierdzenia, by udowodnić, że takie twierdzenia są konsekwencjami, itd., oraz przy porównywaniu teorii z inną.
- Jest to systematyczne, rządzone regułami zachowanie, wykazujące szereg jednorodności.

Re-interpretacja: II

- Komprehensja i identyfikacja systematyzują tę praktykę przez uzasadnianie ruchu od twierdzeń postaci ‘W T, $\Pi\kappa$’ do egzystencjalnych kwantyfikacji nad przedmiotami i własnościami T.
- Komprehensja jest dlatego też ekstraktorem wzorca, dającym pewien rodzaj deflacyjnego widzenia przedmiotów matematycznych i relacji. Matematyczne przedmioty nie są już więcej samo-utrzymujące się, ale zależą od praktyki matematycznej.
- Rzeczywiście, w przypadku matematyki potrzebna jest praktyka, aby zasadę komprehensji uszczegóławiać.
- Czyni to Wittgensteinowskie rozumienie języka bardziej precyzyjnym oraz pomaga naturalizować część formalnej metafizyki.

Metafizyka obliczeniowa

Car si nous l'avions telle que je la conçois, nous pourrions raisonner en metaphysique et en morale à pue pres comme en Geometrie et en Analyse Leibniz (Gerhardt 1890, vii, 21)

Gdybyśmy mieli to [jakąś *characteristica universalis*], powinniśmy być w stanie rozumować w metafizyce i moralności zupełnie w ten sam sposób jak w geometrii i analizie.
Russell 1900, 169

Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo . . . dicere: calculemus.
Leibniz (Gerhardt 1890, vii, 200)

Gdyby miały powstać kontrowersje, nie byłoby większej potrzeby prowadzenia dysput między dwoma filozofami niż między dwoma księgowymi. Bo wystarczyłoby, żeby wzięli swoje ołówki do rąk, zasiedli do swoich tabliczek, i powiedzieli do siebie . . . : No to policzmy. Russell 1900, 170

Implementacja w PROVER9: I

- Podstawowy zapis (syntaktyka PROVER9 w nawiasach):

Predykaty	A, B, C (`A`, `B`, `C`)	Stałe	a, b, c (`a`, `b`, `c`)
Zmienne	x, y, z (`x`, `y`, `z`)	Funkcje	f, g, h (`f`, `g`, `h`)
Kwantyfikatory	$\forall$, $\exists$ (NA)	Spójniki	$\&$, $\rightarrow$, $\vee$, $\neg$, $=$ (NA, NA, `|`, `-`, `=`)

NA - *nie mające zastosowania*

- Formuły a klauzule (eliminacja kwantyfikatora i koniunkcyjna postać normalna CNF)

Formuła	Klauzula (PROVER9 — wolne od Q, i CNF)
$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$	`-P(x) | Q(x).`
$(\exists x)(Px \,\&\, Qx)$	`P(a). Q(a).` (dwa zdania, nowe “a”)
$(\forall x)(\exists y)(Rxy \vee x \neq y)$	`R(x,f(x)) | -(x = f(x)).` (nowe “f”)
$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Rxyz \,\&\, Rzyx)$	`R(x,y,f(x,y)). R(f(x,y),x,y).` (nowe “f”)

- By uzyskać więcej szczegółów, patrz rozdziały 1 i 10 Kalman 2001 McCune 1994.

Implementacja w PROVER9: II

- PROVER9 implementuje reguły inferencji i strategie. Dla naszych celów wystarczy przedyskutować tylko jedną z nich.
- *Hiperrezolucja* jest uogólnieniem sylogizmu z alternatywą będącego prawem logiki klasycznej. Oto kilka przykładów:

```
-P | M.      -P(x) | M(x).     -L(x,f(b)) | L(x,f(a)).
P.           P(x).             L(y,f(y)).
-------      -------------     -----------------------
∴ M.         ∴ M(x).           ∴ L(b,f(a)).
```

- W trzecim przykładzie: $x \mapsto b$, $y \mapsto b$.

Implementacja w Prover9: III

Oto prosty dowód w Prover9 poprawności następującego argumentu:

$\forall x(Greek(x) \rightarrow Person(x))$.

$\forall x(Person(x) \rightarrow Mortal(x))$.

$Greek(socrates)$.

$Mortal(socrates)$

```
1 [ ] -Greek(x) | Person(x)
2 [ ] -Person(x) | Mortal(x)
3 [ ] Greek(socrates)
4 [ ] -Mortal(socrates)
5 [hyper,3,1] Person(socrates)
6 [hyper,5,2] Mortal(socrates)
7 [hyper,6,4] F
```

Implementacja w Prover9: IV

- Teoria przedmiotów drugiego rzędu musi być reprezentowana w języku pierwszego rzędu Prover9 za pomocą co najmniej dwu *sortów*: `Property` oraz `Object`.
- Np., unarna egzemplifikacja Fx oraz kodowanie xF (dwie formy predykacji) mogą być reprezentowane i zapisane (czcionką) w Prover9 jak poniżej:
  - `all F x (Ex1(F,x) -> Property(F) & Object(x)).`
  - `all F x (Enc(x,F) -> Property(F) & Object(x)).`
- Binarna predykacja wymaga nowej relacji: `Ex2(R,x,y)`, itd.
- Modalne twierdzenia (logiki S5) mogą być przetłumaczone na Prover9 w stylu Kripkego, przy pomocy trzeciego sortu: `Point` (*not* `World`!).
  - ```
    all F x w (Ex1(F,x,w) ->
                    Property(F) & Object(x) & Point(w)).
    ```
    ```

Implementacja w Prover9: V

- Zdań nie można definiować jako zero-arnych relacji (Prover9 nie ma takich), więc wymagany jest czwarty rodzaj sortów: `Proposition`.
- Z posortowanymi terminami, Prover9 wymaga wyraźnych warunków zapisu:
  - ```
    all x (Property(x) -> -Object(x)).
    all x (Property(x) -> -Proposition(x)).
    all x (Property(x) -> -Point(x)).
    ```
- Własności złożone (tj. λ-wyrażenia) mogą być reprezentowane w Prover9 poprzez użycie funktorów. Np. reprezentujemy własność *będąc takim, że p* (‘$[\lambda y\ p]$’) stosując funktor `VAC`:
  - `all p (Proposition(p) <-> Property(VAC(p))).`
  - ```
    all x p w ((Object(x) & Proposition(p) & Point(w)) ->
                   (Ex1(VAC(p),x,w) <-> True(p,w))).
    ```

Przesłanki dla twierdzenia: Wszystkie światy są maksymalne

- Negacje zdań są zdaniami. (aksjomat logiczny)

```
all p (Proposition(p) -> Proposition(~p)).
```

To daje klauzulę:

```
-Proposition(x) | Proposition(~x)
```

- ‘Prawda w pewnym punkcie’ jest spójna. (aksjomat logiczny)

```
all w all p ((Point(w) & Proposition(p)) ->
  (True(~p,w) <-> -True(p,w))).
```

Daje to klauzule:

```
-Point(x) | -Proposition(y) | True(~y,x)  | True(y,x).
-Point(x) | -Proposition(y) | -True(~y,x) | -True(y,x).
```

Przesłanki dla twierdzenia: Wszystkie światy są maksymalne

- $Maximal(x) =_{df} \forall p(x \models p \ \vee \ x \models \neg p)$ (Definicja)

```
all x (Object(x) -> (Maximal(x) <->
  (all p (Proposition(p) ->
    TrueIn(p,x) | TrueIn(~p,x)))))).
```

Daje to klauzule:

```
-Object(x)| -Maximal(x).
-Object(x)| -Maximal(x) | -Proposition(z)| TrueIn(z,x)| TrueIn(z,x).
-Object(x)| Maximal(x) | Proposition(f1(x)).
-Object(x)| Maximal(x) | -TrueIn(f1(x),x).
-Object(x)| Maximal(x) | -TrueIn( f1(x),x).
```

Przesłanki dla twierdzenia: Wszystkie światy są maksymalne

- $World(x) =_{df} \Diamond\forall p(x \models p \equiv p)$ (Definicja)

```
all x (Object(x) -> (World(x) <->
  (exists y (Point(y) &
    (all p (Proposition(p) ->
      (TrueIn(p,x) <-> True(p,y))))))))).
```

W postaci klauzulowej:

```
-Object(x) | -World(x).

-Object(x) | -World(x) | Point(f2(x)).

-Object(x) | -World(x) | -Proposition(u) | TrueIn(u,x) | -True(u,f2(x)).

-Object(x) | -World(x) | -Proposition(u) | TrueIn(u,x) | -True(u,f2(x)).

-Object(x) | World(x) | -Point(y) | Proposition(f3(x,y)).

-Object(x) | World(x) | -Point(y) | TrueIn(f3(x,y),x) | True(f3(x,y),y).

-Object(x) | World(x) | -Point(y) | -TrueIn(f3(x,y),x) | -True(f3(x,y),y).
```

Przesłanki dla twierdzenia: Wszystkie światy są maksymalne

- Światy są przedmiotami. (aksjomat właściwy)

```
all x (World(x) -> Object(x)).
```

W postaci klauzulowej:

```
-World(x) | Object(x)
```

Dowód w Prover9, że każdy świat jest maksymalny

```
1 World(c1).
2 -Maximal1(c1).
4 -World(x) | Object(x).
6 -Object(x) | Maximal1(x) | Proposition(f1(x)).
7 -Object(x) | -World(x) | Point(f2(x)).
8 -Object(x) | Maximal1(x) | -TrueIn(f1(x),x).
9 -Object(x) | Maximal1(x) | -TrueIn(~f1(x),x).
14 -Object(x) | -World(x) | -Proposition(y) | TrueIn(y,x) | -True(y,f2(x)).
18 -Object(c1) | Point(f2(c1)). [resolve (7 b 1 a)]
22 -Object(c1) | -Proposition(x) | TrueIn(x,c1) | -True(x,f2(c1)).
   [resolve (14 b 1 a)]
30 -Object(c1) | Proposition(f1(c1)). [resolve (6 b 2 a)]
31 -Object(c1) | -TrueIn(f1(c1),c1). [resolve (8 b 2 a)]
32 -Object(c1) | -TrueIn(~f1(c1),c1). [resolve (9 b 2 a)]
```

```
37 -Proposition(x) | Proposition(~x).
38 -Point(x) | -Proposition(y) | True(~y,x) | True(y,x).
39 Object(c1). [resolve (4 a 1 a)]
40 Point(f2(c1)). [copy 18 unit_del (a 39)]
44 -Proposition(x) | TrueIn(x,c1) | -True(x,f2(c1)).
   [copy 22 unit_del (a 39)]
52 Proposition(f1(c1)). [copy 30 unit_del (a 39)]
53 -TrueIn(f1(c1),c1). [copy 31 unit_del (a 39)]
54 -TrueIn(~f1(c1),c1). [copy 32 unit_del (a 39)]
60 -Proposition(x) | True(~x,f2(c1)) | True(x,f2(c1)).
   [resolve (40 a 38 a)]
63 Proposition(~f1(c1)). [resolve (52 a 37 a)]
64 -True(f1(c1),f2(c1)). [ur (44 a 52 a b 53 a)]
68 -True(~f1(c1),f2(c1)). [ur (44 a 63 a b 54 a)]
70 F. [resolve (60 a 52 a) unit_del (a 68) unit_del (b 64)]
```

Nasze wyniki w Metafizyce Obliczeniowej

- Prover9 znalazł dowody wszystkich twierdzeń, oprócz jednego, w Pellettier i Zalta 2000 ("Jak pożegnać Trzeciego Człowieka"), wyjątek dotyczy błędu rozumowania popełnionego przez autorów! Mace (program budowania modelu) wskazał kontrmodel.
- Prover9 znalazł dowody wszystkich twierdzeń w Zalta 1993 ("25 podstawowych twierdzeń w teorii sytuacji i świata").
- Prover9 znalazł uproszczenie argumentu ontologicznego Anselma: Istnienie Boga można wywieść z pojedynczej przesłanki poza-logicznej. Zobacz Oppenheimer i Zalta (ukaże się wkrótce): `http://mally.stanford.edu/Papers/ontological-computational.pdf`
- Nasze pliki wejściowe i wyjściowe, oraz dowody niesprzeczności przesłanek (z wykorzystaniem Mace) są dostępne online:
  `http://mally.stanford.edu/cm/`

Bibliografia

Boolos, G., 1986, 'Saving Frege From Contradiction', *Proceedings of the Aristotelian Society*, 87: 137–151; reprinted in Boolos [1998], 171–182.

Cook, R., 2003, 'Iteration One More Time', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 44/2: 63–92.

Fine, K., 2002, *The Limits of Abstraction*, Oxford: Clarendon Press.

Gerhardt, C. I. (ed.), 1890, *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, Volume vii, Berlin.

Hale, B., 1987, *Abstract Objects*, Oxford: Blackwell.

Hale, B., 2000, 'Reals by abstraction', *Philosophia Mathematica*, 8: 100–123.

Hodes, H., 1984, 'Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic', *Journal of Philosophy*, LXXXI/3 (March): 123–149.

Hodes, H., 1991, 'Where Do Sets Come From?', *Journal of Symbolic Logic*, 56/1 (March): 151–175.

Kalman, J., 2001, *Automated Reasoning with Otter*, Princeton: Rinton Press.

Linsky, B., and Zalta, E., 1994, 'In Defense of the Simplest Quantified Modal Logic', *Philosophical Perspectives* 8: 431–58.

Linsky, B., and Zalta, E., 1995, 'Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism', *The Journal of Philosophy*, XCII/10: 525–555.

Linsky, B., and Zalta, E., 2006, 'What is Neologicism?', *Bulletin of Symbolic Logic*, 12/1: 60–99.

McCune, W., 2003, 'Otter 3.3 Reference Manual', Technical Memorandum 263, Argonne National Laboratory, Argonne, IL.

Oppenheimer, P., and Zalta, E., forthcoming, 'A Computationally Discovered Simplification of the Ontological Argument,' *Australasian Journal of Philosophy*.

Pelletier, F.J., and Zalta, E., 2000, 'How to Say Goodbye to the Third Man', *Noûs*, 34/2 (June): 165–202.

Russell, B., 1900, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge: Cambridge University Press.

Tennant, N., 2004, 'A General Theory of Abstraction Operators', *The Philosophical Quarterly*, 54/214 (January): 105-133.

Williamson, T., 1998, 'Bare Possibilia', *Erkenntnis*, 48: 257-273.

Wright, C., *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Scots Philosophical Monographs, vol. 2, Aberdeen: Aberdeen University Press.

Zalta, E., 1993, 'Twenty-Five Basic Theorems in Situation and World Theory', *Journal of Philosophical Logic*, 22: 385–428;

Zalta, E., 2000, 'Neo-Logicism? An Ontological Reduction of Mathematics to Metaphysics', *Erkenntnis*, 53/1-2 (2000): 219–265.